Complementi di Analisi - 15 Maggio2012

PROF. SUSANNA TERRACINI

Motivare accuratamente le risposte, dimostrando rigorosamente gli enunciati fondamentali.

(1) Data una famiglia parametrizzata $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ di numeri non negativi:
(a) definire il concetto di sommabilità;
(b) provare che, nel caso la somma sia finita, l'insieme $\{\alpha \in \mathcal{A} \ : \ a_\alpha > 0\}$ è al più numerabile;
(c) dimostrare che (finite o infinite che siano) le somme,

$$\sum_{(n,m)} a_{n,m} = \sum_n \sum_m a_{n,m} = \sum_m \sum_m a_{n,m}$$

(2) Dopo avere dato la definizione di funzione misurabile e di funzione semplice,
(a) enunciare e dimostrare il teorema di approssimazione uniforme delle funzioni misurabili con quelle semplici;
(b) approssimare con funzioni semplici la funzione $f(x) = 1/\sqrt{x}$ nell'intervallo $(0,1)$ e discuterne l'integrabilità.

(3) Enunciare e dimostrare il teorema di Egorov.

(4) Sia data una successione di funzioni integrabili, non negative, convergente quasi ovunque su X. Si supponga che esista una funzione $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tale che
(i)

$$\mu(\{x \in X \ : \ f_n(x) > t\}) \leqslant g(t) \ , \forall t$$

(ii)

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt < +\infty$$

Dimostrare che allora

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu$$